Instituto de Matemática
Álgebra
2019-1

Prueba Nº 1

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.
- La prueba dura 100 minutos.

---

1) a) Considere los siguientes conjuntos:

- $A = \{-3, -1, 0, 2, 5\}$
- $B = \{\text{números naturales impares menores que } 7\}$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones (justificando adecuadamente), y escriba la negación de cada una de ellas:

i) **[5 pts.]** $(\exists x \in A)(\forall y \in B) : (x + 1 > y)$

ii) **[5 pts.]** $(\forall x \in B)(\exists y \in A) : (x + y < 1) \vee (x - y = 0)$

b) Considerando el conjunto universo $U = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x \leq 20\}$, se definen los siguientes subconjuntos de U:

- $A = \{\text{números primos}\}$
- $B = \{\text{múltiplos de } 3\}$

i) **[4 pts.]** Determine la cardinalidad de $(A - B) \cup (B \cup A)$

ii) **[4 pts.]** Se define $C = \{x \in U : x + 1 \in B\}$. Determine explícitamente el conjunto $A \cap C$.

iii) **[2 pts.]** Determine el conjunto potencia de $A \cap B$.

2) Considere la proposición lógica

$$[\overline{(\bar{p} \wedge q)} \longrightarrow (\bar{p} \wedge q)] \wedge (q \vee s)$$

a) **[10 pts.]** Simplifique al máximo la proposición usando el álgebra de proposiciones.

b) **[10 pts.]** Si se sabe que la proposición es VERDADERA, determine el valor de verdad de $\overline{(p \longrightarrow q)} \longrightarrow s$:

3) a) **[10 pts.]** Dada la siguiente proposición, determine el circuito lógico correspondiente.

$$(\bar{q} \wedge p) \vee \left[(\bar{p} \vee [\bar{q} \wedge r]) \wedge (q \vee \bar{r} \vee p)\right]$$

b) **[10 pts.]** Determine si la siguiente proposición es una Tautología, Contradicción o Contingencia:

$$\overline{(p \rightarrow q) \wedge \overline{(p \wedge \bar{q} \wedge r)}} \leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$$

DESARROLLO

1) a) Tenemos que $A = \{-3, -1, 0, 2, 5\}$ y que $B = \{1, 3, 5\}$

   I) $(\exists x \in A)(\forall y \in B) : (x + 1 > y)$ es verdadera ya que **existe** el 5 en A de modo que

$$\begin{array}{c} 5 + 1 > 1 \\ 5 + 1 > 3 \\ 5 + 1 > 5 \end{array}$$

   (3 pts.)
   La negación sería $(\forall x \in A)(\exists y \in B) : (x + 1 \leq y)$ (2 pts.)

   II) $(\forall x \in B)(\exists y \in A) : (x + y < 1) \vee (x - y = 0)$ es verdadera ya que:

$$\begin{array}{c} 1 + (-3) < 1 \\ 3 + (-3) < 1 \\ 5 - 5 = 0 \end{array}$$

   (3 pts.)
   La negación sería $(\exists x \in B)(\forall y \in A) : (x + y \geq 1) \wedge (x - y \neq 0)$ (2 pts.)

b) Observar que

- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
- $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
- $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

   I) Observar que simplificando se puede deducir que $(A - B) \cup (B \cup A) = (A \cup B)$, y

$$A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19\}(2pts.)$$

   por lo que tenemos que la cardinalidad de $(A \cup B)$ es 13.(2 pts.)

   II) Observar que $C = \{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$ (2 pts.). Por lo que tenemos que

$$A \cap C = \{2, 5, 11, 17\}(2pts.)$$

   III) Como $A \cap B = \{3\}$, entonces $\mathbb{P}(A \cap B) = \{\emptyset, \{3\}\}$ (2 pts.)

2) a)

$$\begin{aligned} [\overline{(\bar{p} \wedge q)} \longrightarrow (\bar{p} \wedge q)] \wedge (q \vee s) &= [(\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q)] \wedge (q \vee s)(3pts.) \\ &= (\bar{p} \wedge q) \wedge (q \vee s) \\ &= \bar{p} \wedge q \wedge (q \vee s)(3pts.) \\ &= \bar{p} \wedge q(4pts.) \end{aligned}$$

b) Tenemos que si

$$[\overline{(\bar{p} \wedge q)} \longrightarrow (\bar{p} \wedge q)] \wedge (q \vee s)$$

es verdadera, entonces

$$[\overline{(\bar{p} \wedge q)} \longrightarrow (\bar{p} \wedge q)] = V, \quad (q \vee s) = V \quad (2pts.)$$

Pero

$$\overline{(\bar{p} \wedge q)} \longrightarrow (\bar{p} \wedge q) \equiv \overline{\overline{(\bar{p} \wedge q)}} \vee (\bar{p} \wedge q) \equiv (\bar{p} \wedge q),$$

por lo que $\bar{p} = V$ y $q = V$. Así, $p = F$ y $q = V$. $(4pts.)$

Finalmente,

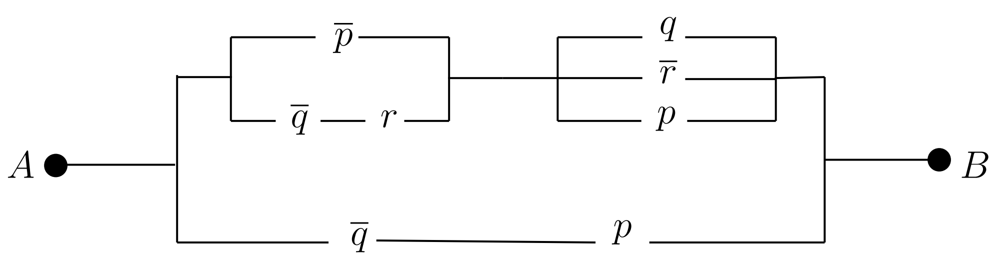
$$\overline{(p \longrightarrow q)} = \overline{F \longrightarrow V} = F, \quad (2pts.)$$

y en consecuencia,

$$\overline{(p \longrightarrow q)} \longrightarrow \ s = V, \quad (2pts.)$$

independiente del valor de verdad de s.

3) a) El circuito correspondiente es:



[10 pts.]

b) Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{(p \rightarrow q) \wedge \overline{(p \wedge \bar{q} \wedge r)}} \leftrightarrow (p \wedge \bar{q}) &= \overline{(\bar{p} \vee q) \wedge \overline{(p \wedge \bar{q} \wedge r)}} \leftrightarrow (p \wedge \bar{q}) \text{[2 pts.]} \\
&= (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge \bar{q}) \text{[3 pts.]} \\
&= (p \wedge \bar{q}) \leftrightarrow (p \wedge \bar{q}) \text{[3 pts.]} \\
&= V
\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que la proposición es una Tautología.[2 pts.]